SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. Citti

METODI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA NELLO STUDIO DI EQUAZIONI ELLITTICHE QUASILINEARI IN ASSENZA DI SIMMETRIA

1 Marzo 1990

1. INTRODUZIONE

Consideriamo l'equazione

(1) $$\Delta u - u + g|u|^{q-2}u = 0 \text{ in } \mathbf{R}^n,$$

dove $n \geq 3$, $2 < q < \frac{2n}{n-2}$, e g è una funzione continua e nonnegativa, tale che esiste

$$\lim_{|x|\to\infty} g(x) = g_\infty .$$

Indichiamo

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |Du|^2 + \int_{\mathbf{R}^n} u^2\right)^{1/2}$$

e I il funzionale

$$I:H^1(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R} \qquad I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q}\int_{\mathbf{R}^n} g\,|u|^q.$$

I è di classe C^1 e $\forall\, u,h \in H^1(\mathbf{R}^n)$ $\quad dI(u)(h) = \langle u,h\rangle - \int_{\mathbf{R}^n} g|u|^{q-2}uh,$

e i suoi punti critici si dicono soluzioni di (1).

Indichiamo con I_∞ il funzionale associato all'equazione all'infinito:

$$I_\infty : H^1(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R} \qquad I_\infty(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q}\int_{\mathbf{R}^n} g_\infty |u|^q .$$

Siano infine

$$M = \{u \neq 0 : dI(u)(u) = 0\} \quad \text{e} \quad M_\infty = \{u \neq 0 : dI_\infty(u)(u) = 0\}.$$

Abbiamo già visto alcune relazioni fra il funzionale I e questa varietà, in particolare abbiamo osservato che

$$I(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u\|^2 ,$$

$$\inf_M I > 0.$$

Osservazione 1. Se per ogni $u \neq 0$ definiamo

(2) $$\tau(u) = \left(\frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbf{R}^n} g(x)|u|^q} \right)^{1/(q-2)}$$

è immediato riconoscere che $\tau(u)u \in M$. Inoltre vale la seguente relazione fra le successioni di Palais Smale di I e di $I_{|M}$:

i) Se (u_k) è una successione in $H^1(\mathbf{R}^n)$, tale che $I(u_k) \to \lambda$, e $dI(u_k) \to 0$ per $k \to +\infty$, allora $\tau(u_k) \to 1$, $I(\tau(u_k)u_k) \to \lambda$, e $dI_{|M}(\tau(u_k)u_k) \to 0$ per $k \to +\infty$.

ii) Se (u_k) è una successione in M tale che $I(u_k) \to \lambda$ e $dI_{|M}(u_k) \to 0$, allora $dI(u_k) \to 0$ per $k \to \infty$.

La prova di i) è immediata, proviamo ii). Indichiamo per semplicità $T(u)=dI(u)(u)$, allora per ogni h si ha

$$dI(u_k)(h) = dI(u_k)(h) - dI(u_k)(u_k) \frac{dT(u_k)(h)}{dT(u_k)(u_k)} =$$

$$= dI(u_k)\left(h - \frac{dT(u_k)(h)}{dT(u_k)(u_k)} u_k\right).$$

Ma $h - \frac{dT(u_k)(h)}{dT(u_k)(u_k)} u_k$ appartiene al piano tangente M in u_k, quindi

$$|dI(u_k)(h)| \leq |dI_{|M}(u_k)\left(h - \frac{dT(u_k)(h)}{dT(u_k)(u_k)} u_k\right)| \leq$$

$$\leq C \, \|dI_{|M}(u_k)\| \; \|h\| ,$$

poichè u_k è una successione limitata e quindi $\|dT(u_k)\|$ è limitata, mentre $|dT(u_k)(u_k)|$ è limitata dal basso perché $u_k \in M$.

Pertanto per determinare soluzioni potremo sempre cercare punti critici vincolati.

Ricordiamo che vale il seguente teorema di rappresentazione per le successioni di Palais Smale di I. (e quindi anche per quelle di $I_{|M}$).

Teorema 2. *Sia* (u_k) *una successione tale che* $I(u_k) \to \lambda$ *e* $dI(u_k) \to 0$ *per* $k \to +\infty$. *Allora esistono un numero* $m \in \mathbf{N}$, *e* m *successioni* (y_k^j) *in* $\mathbf{R}^n$, *tali che* $|y_k^j| \to +\infty$ per $k \to +\infty$

$$u_k(x) = u^o(x) + \sum_{j=1}^{m} u^j (x - y_k^j) + \psi_k(x),$$

$$\lambda = I(u^o) + \sum_{j=1}^{m} I_\infty (u^j),$$

dove u^o *è soluzione di* $dI(u^o)=0$, u^j *di* $dI_\infty(u^j)=0$ $\forall\, j=1...m$, *e* $\psi_k \to 0$ *in* $H^1(\mathbf{R}^n)$ *per* $k\to+\infty$.

Abbiamo già visto che da questo segue il

Teorema 3. *Se* $\inf\limits_{M} I < \inf\limits_{M_\infty} I_\infty$ *allora* (1) *ha soluzione.*

e in particolare

Corollario 4. *Se* $g_\infty = \inf\limits_{\mathbf{R}^n} g$, *allora l'equazione* (1) *ha soluzione.*

D'altra parte l'equazione all'infinito associata a (1),

$$\Delta u - u + g_\infty |u|^{q-2}u = 0 \text{ in } \mathbf{R}^n, \qquad \text{con } 2<q<\frac{2n}{n-2}, \tag{3}$$

ha una soluzione nonnegativa, a meno di traslazioni della variabile (cf. [GNN], [K]). Osserviamo esplicitamente che è verificato un teorema di unicità soltanto per le soluzioni nonnegative, poiché questa equazione ha infinite soluzioni di segno non costante (cf. [BL]). La soluzione nonnegativa ω è radialmente simmetrica, radialmente decrescente e verifica le condizioni

$$\lim_{|x|\to\infty} \omega(x)\, |x|^{(n-1)/2}\, e^{|x|} = C > 0. \tag{4}$$

$$\inf_{M_\infty} I_\infty = I_\infty(\omega).$$

Se la successione (u_k) è nonnegativa, anche le soluzioni che si determinano nel teorema di scomposizione sono nonnegative, pertanto il teorema implica:

Corollario 5. *Se* (u_k) *è una successione di funzioni nonnegative, e tali che* $I(u_k) \to \lambda$ *e* $dI(u_k) \to 0$, *allora*

$$u_k(x) = u^o(x) + \sum_{j=1}^{m} \omega(x-y_k^j) + \psi_k(x),$$

$$\lambda = I(u^o) = mI_\infty(\omega),$$

dove u^o *è soluzione di* $dI(u^o) = 0$, u^j *di* $dI_\infty(u^j) = 0 \quad \forall\, j=1..m$, *e* $\psi_k \to 0$ *in* $H^1(\mathbf{R}^n)$ *per* $k \to +\infty$.

Corollario 6. *Nelle stesse ipotesi del corollario 5, se* λ *non è un multiplo intero di* $I_\infty(\omega)$, *allora* (1) *ha una soluzione nonnegativa.*

Benci e Cerami hanno mostrato come in certi casi si possano utilizzare metodi di minimax, di tipo Liusternik e Shnirelman, per costruire successioni che verifichino le ipotesi di questo corollario. Con la tecnica che essi hanno introdotto si può dimostrare che

Teorema 7. Se $g(x) \geq 2^{-(q-2)/2} g_\infty$ *allora* (1) *ha una soluzione nonnegativa.*

Questo teorema impone ancora una condizione sul comportamento di g su tutto lo spazio, mentre il fatto che nel teorema di rappresentazione compaiono soltanto soluzioni di (3) concentrate all'infinito, sembra indicare che solo i valori di g in un intorno dell'infinito debbano influire sull'esistenza di soluzioni.

Infatti Bahri e Lions, studiando i sottolivelli del funzionale I con tecniche di topologia algebrica, hanno provato che

Teorema (8). *Se esiste* $R>0$ *tale che*

$$g(x) \geq g_\infty - \exp(-\alpha|x|)|x|^{-(n-1)/2} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n, \textit{ con } |x| > R, \textit{ e } \alpha > 0,$$

allora (1) *ha una soluzione nonnegativa* (cf. [BaL].

Le tecniche usate per risolvere questo problema si possono applicare anche all'equazione

$$(5) \qquad \Delta u - u + g_\infty |u|^{q-2} u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

dove $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ è un dominio esterno, $n \geq 3$, $2<q<\frac{2n}{n-2}$. Se Ω non verifica alcuna condizione di simmetria, ci troviamo in una condizione analoga alla precedente e anche questa equazione si può studiare con un metodo di confronto con l'equazione all'infinito

$$\Delta u - u + g_\infty |u|^{q-2} u = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n.$$

Il metodo di Benci e Cerami [BC] impone un controllo su tutto lo spazio, e quindi sulla misura di Ω.

Teorema 9. *Esiste* $R>0$ *tale se che* $\Omega' \subset B(0,R)$, *allora l'equazione* (5) *ha una soluzione nonnegativa.*

Il metodo di Bahri e Lions permette invece di provare

Teorema 10. *L'equazione* (5) *ha una soluzione* (cf [BaL]).

2. In questo paragrafo daremo un accenno della prova del teorema 8, nell'ipotesi che

$$g(x) \geq g_\infty - o(\exp(-2|x|)|x|^{-(n-2)/2}),$$

perché la prova risulta notevolmente semplificata.

Introduciamo alcune notazioni:

Indichiamo

$$W_c = \{u \in M^+ : I(u) \leq (1+c) \inf_M I\} \qquad \forall c > 0,$$

$$V(\varepsilon) = \{u \in M^+ : \exists x \in S^{n-1},\ |x| > \frac{1}{\varepsilon},\ |u - \omega(.-x)| < \varepsilon\} \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

$$B_1 = S^{n-1} = \{\delta_x\ ,\ x \in S^{n-1}\}\ ,$$

$$B_2 = \{t_1\ \delta_{x_1} + t_2\ \delta_{x_2} : t_1, t_2 \geq 0,\ t_1 + t_2 = 1,\ x_1, x_2 \in S^{n-1}\},$$

$$f(\lambda) : B_2 \to M^+ \qquad f(\lambda)(t_1\ \delta_{x_1} + t_2\ \delta_{x_2}) = \tau\left(\sum_{i=1}^{2} t_i\ \omega(.-\lambda x_i)\right) \sum_{i=1}^{2} t_i\ \omega(.-\lambda x_i),$$

dove τ è definita in (2).

Osservazione 11. In generale vale la relazione $\inf_M I \leq \inf_{M_\infty} I_\infty$.

Sia ω la soluzione di (3), $x \in \mathbf{R}^n$, e sia

$$\omega_k = \tau(\omega(.-kx))\omega(.-kx),$$

dove τ è definito in (2).

Questa è una successione in M per la definizione di τ, quindi, per l'osservazione 1,

$$I(\omega_k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\tau^2(\omega_k)\,\|\omega_k\|^2 =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\frac{\|\omega(.-kx)\|^{q/(q-2)}}{\left(\int_{\mathbf{R}^n} g(y)|\omega(y-kx)|^q\right)^{1/(q-2)}} \to \text{(poiché } g \to g_\infty \text{ per } |y| \to \infty)$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\frac{\|\omega(.-kx)\|^{q/(q-2)}}{\left(\int_{\mathbf{R}^n} g_\infty(y)|\omega(y-kx)|^q\right)^{1/(q-2)}} =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\frac{\|\omega\|^{q/(q-2)}}{\left(\int_{\mathbf{R}^n} g_\infty\, |\omega|^q\right)^{1/(q-2)}} = I_\infty(\omega) = \inf_M I_\infty, \text{ per (4).}$$

Se $\inf_M I < I_\infty$, il teorema 3 assicura l'esistenza di soluzioni, per l'equazione (1). Se $\exists u \in M$ tale che $I(u) = \inf_M I$, allora u è un punto critico di $I_{|M}$, e per l'osservazione 1, anche di I.

Basterà allora dimostrare il teorema 8 nell'ipotesi

$$\forall u \in M \quad I(u) > \inf_M I = \inf_{M_\infty} I_\infty = I_\infty(\omega).$$

Nel seguito lavoreremo sempre sotto questa ipotesi.

Lemma 12. *Per ogni* $\delta \in]0,1[$ *esiste* $\lambda > 0$ *tale che*

i) $f(\lambda)(B_1) \subset W_\delta \subset W_1$

ii) $f(\lambda)(B_2) \subset W_1 \subset W_2$.

Dimostrazione. Per provare i) basta provare che

$$I(\tau(\omega(.-\lambda x))\omega(.-\lambda x)) \leq (1+\delta)\, I_\infty(\omega) \qquad \forall x \in S^{n-1},$$

e la prova è analoga a quella della osservazione 11.

Diamo un'idea della prova di ii), per mostrare come gioca l'ipotesi su g. Si tratta di dimostrare che

$$I(\tau(\sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(\cdot-\lambda x_i))\ \sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(\cdot-\lambda x_i)) \leq 2I_\infty(\omega)$$

D'altra parte

$$I(\tau(\sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(\cdot-\lambda x_i))\ \sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(\cdot-\lambda x_i)) =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \frac{\|\sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(.-\lambda x_i)\|^{2q/(q-2)}}{\left(\int_{\mathbf{R}^n} g(y)\, |\sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(y-\lambda x_i)|^q\right)^{1/(q-2)}}$$

Il numeratore si può scrivere:

$$\|\sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(.-\lambda x_i)\|^2 = \left(t_1^2 + t_2^2\right) \|\omega\|^2 + 2t_1\, t_2 <\omega_1,\omega_2> =$$

poiché ω è soluzione di (3)

$$= \left(t_1^2+t_2^2\right)\|\omega\|+t_1\, t_2 \int_{\mathbf{R}^n} g_\infty\, |\omega_1|^{q-2}\, \omega_1\, \omega_2 + t_2\, t_1 \int_{\mathbf{R}^n} g_\infty\, |\omega_2|^{q-2}\, \omega_2\omega_1.$$

Il denominatore si stima nel modo seguente:

$$\int_{\mathbf{R}^n} g(y)\, |\sum_{i=1}^{2} t_i\omega(.-\lambda x_i)|^q \geq$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} (g(y)-g_\infty)\, |\sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(.-\lambda x_i)|^q + \int_{\mathbf{R}^n} g_\infty\, |\sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(.-\lambda x_i)|^q \geq$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} (g(y)-g_\infty)\, |\sum_{i=1}^{2} t_i\, \omega(.-\lambda x_i)|^q + \sum_{i=1}^{2} t_i^q \int_{\mathbf{R}^n} g_\infty\, |\omega|^q +$$

$$+ (q-\mu(\lambda)) \left(t_1^{q-1}\, t_2 \int_{\mathbf{R}^n} g_\infty\, |\omega_1|^{q-2}\, \omega_1\omega_2 + t_2^{q-1}\, t_1 \int_{\mathbf{R}^n} g_\infty\, |\omega_2|^{q-2}\, \omega_2\omega_1\right)$$

dove $\mu(\lambda) \to 0$ per $\lambda \to +\infty$.

E' possibile fare una stima precisa dei termini misti, che compaiono in questa espressione, perchè si conosce il comportamento asintotico di ω:

$$\int_{\mathbf{R}^n} g_\infty\, |\omega_1|^{q-2}\, \omega_1\omega_2 = \int_{\mathbf{R}^n} g_\infty\, |\omega(y)|^{q-2}\, \omega(y)\, \omega(y-\lambda|x_1-x_2|) \geq$$

$$\mathrm{esp}(-\lambda|x_1-x_2|)(\lambda|x_1-x_2|)^{-(n-1)/2} \geq \mathrm{esp}(-2\lambda)(2\lambda)^{-(n-1)/2},$$

L'ipotesi $g(x) \geq g_\infty + o(\mathrm{esp}(-2\lambda)(2\lambda)^{-(n-2)/2})$ permette di avere una stima di tutti i termini, e di concludere.

Lemma 13. *Se l'equazione* (1) *non ha soluzione,* W_δ *è un retratto forte di deformazione di* W_1.

Dimostrazione. Si tratta di una modifica di un argomento di deformazione di tipo Liusternik e Schnirelman (cf. anche [R]).

Per ogni $u_0 \in W_1$ consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{I'_{|M}(u)}{(1+|I'_{|M}(u)|^2)^{1/2}} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

e indichiamo $u(t,u_0)$ la soluzione. E' immediato riconoscere che per ogni $u_0 \in W_1$, esiste un'unica soluzione del problema, definita per ogni $t>0$, e tale che $u(t,u_0) \in M^+ \quad \forall t>0$.

La funzione $t \to I(u(t,u_0))$ è decrescente strettamente lungo la traiettoria

$$\frac{d}{dt} I(u(t,u_0)) = I'(u(t,u_0))(u'(t,u_0)) =$$

$$= -\frac{|I'_{|M}(u(t,u_0))|^2}{(1+|I'_{|M}(u(t,u_0))|^2)} < 0$$

Inoltre per ogni $u_0 \in W_1$ esiste $t>0$ tale che

$$I(u(t,u_0)) < (1+\delta)\, I_\infty(\omega).$$

Infatti, se per assurdo non fosse così, esisterebbe $u_0 \in W_1$, tale che

$$(1+\delta)\, I_\infty(\omega) < \lim_{t\to+\infty} I(u(t,u_0)) < 2\, I_\infty(\omega),$$

per la monotonia di $I(u(t,u_0))$.

Allora

$$0 = \lim_{t,\tau\to+\infty} \big(I(u(t,u)) - I(u(\tau,u_0))\big) = -\int_\tau^t \frac{|\Gamma'|_M(u)|^2}{(1+|\Gamma'|_M(u)^2)^{1/2}}$$

e quindi esiste una successione (t_k) in $\mathbf{R}^+$ tale che $t_k \to \infty$ e

$$\begin{cases} I(u(t_k,u_0)) \to 1 \in\ ]I_\infty(\omega),\, 2I_\infty(\omega)[\\ dI(u(t_k,u_0)) \to 0 \end{cases}$$

ma allora per il corollario 6, esiste una soluzione di (1) contro l'ipotesi. Posto allora

$$T(u_0) = \inf\{s > 0 : I(u(s,u_0)) < (1+\delta)\, I_\infty(\omega)\},$$

W_1 ritrae su W_δ attraverso la deformazione

$$r:[0,1] \times W_1 \to W_\delta\,, \qquad r(t,u_o) = u(t\,T(u_o),u_o).$$

E W_δ rimane fisso in questa trasformazione.

Lemma 14. *Se* (1) *non ha soluzione, per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $W_\delta \subset V(\varepsilon)$.

Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$, e una successione (u_k) in M^+ tale che

$$I(u_k) \to \inf_M I$$

$$u_k \notin V(\varepsilon)$$

Allora per il principio variazionale di Ekeland [E] si ha

$$dI(u_k) \to 0,$$

e quindi, per il teorema di rappresentazione,

$$u_k = \omega(\cdot - x_k) + \psi_k,$$

dove $\psi_k \to 0$, e $|x_k| \to +\infty$ per $k \to +\infty$. Ma questo contraddice il fatto che $u_k \notin V(\varepsilon)$.

Dimostrazione del teorema 8. Ragioniamo per assurdo, e supponiamo che non esistano soluzioni di (1).

Indichiamo ora $H_n(X)$ l'ennesimo gruppo di omologia di uno spazio topologico X, e, se Y è un sottospazio di X, indichiamo $H_n(X,Y)$ l'ennesimo gruppo di omologia relativa. Per il lemma 12 ha senso considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_n(B_2,B_1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f(\lambda)_n"'] & H_{n-1}(B_1) \arrow[d, "f(\lambda)_{n-1}"] \\
H_n(W_2,W_1) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(W_1)
\end{tikzcd}$$

dove ∂ è l'omomorfismo di connessione.

Osserviamo che $H_{n-1}(B_1) = H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbf{Z}_2$ e indichiamo ζ il generatore. Con metodi di topologia algebrica elementare si può dimostrare che

$$\partial : H_n(B_2,B_1) \to H_{n-1}(B_1)$$

è suriettiva (cf. [BaL] (5.23)). Sia $\xi \in H_n(B_2,B_1)$ tale che $\partial(\xi) = \zeta$. Allora

$$f(\lambda)_{n-1}(\zeta) = f(\lambda)_{n-1}(\partial(\xi)) = \text{per la commutatività del diagramma}$$

$$= \partial(f(\lambda)_n(\xi)) = \text{perché } f(\lambda)(B_2) \subset W_1$$

$$= 0 .$$

Allora

$$f(\lambda)_{n-1}: H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(W_1)$$

è identicamente nulla. D'altra parte per il lemma 14 per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta>0$ tale che $W_\delta \subset V(\varepsilon)$ e, per il lemma 13, W_δ è un retratto forte di deformazione di W_1. Indicata con

$r: W_1 \to W_\delta$ la retrazione

$i: W_\delta \to V(\varepsilon)$ l'immersione,

si ha

$$(i \cdot r \cdot f(\lambda))_{n-1}: H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(V(\varepsilon))$$

è identicamente nulla. Ma $f(\lambda)$ ha valori in W_δ e $i \cdot r_{|W_\delta} = i$, quindi

$$(f(\lambda))_{n-1}: H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(V(\varepsilon)) \text{ è nulla.}$$

Proviamo che questo è assurdo. Basta dimostrare che $f(\lambda)$ ha inversa sinistra. Per ogni $u \in V(\varepsilon)$ consideriamo il problema di minimo

$$\min \{|u-\alpha\, \omega(.-x)|\,,\ \alpha > 0,\ \ x \in \mathbf{R}^n\}. \tag{6}$$

Si tratta evidentemente di un problema di minimo in uno spazio di dimensione finita. Con metodi elementari si riconosce che $\forall u \in V(\varepsilon)$ il minimo esiste ed è unico. Lo indichiamo con (α_u, x_u). Inoltre,

$$u \to x_u \text{ è continua in } V(\varepsilon) \text{ e}$$

$$|x_u| \geq \frac{1}{2\varepsilon} \qquad\qquad u \in V(\varepsilon), \text{ se } \varepsilon \text{ è piccolo.}$$

Fissiamo ora ε in modo che la funzione

$$s_u : V(\varepsilon) \to S^{n-1} \qquad\qquad s_u = \frac{x_u}{|x_u|}\ ,$$

sia ben definita. Per l'unicità del minimo s_u è l'inversa sinistra di $f(\lambda)$.

3. Supponiamo ora che g verifichi una condizione di convergenza più debole:

$$g(x) \geq g_\infty - \exp(-\alpha|x|),$$

allora il lemma 12 non è verificato e non si può più lavorare nei sottolivelli (W_2,W_1) e W_1, ma occorre studiare tutte le coppie (W_m, W_{m-1}), con $m \leq \bar{m}$ per un $\bar{m}$ opportuno e dipendente da α.

Poniamo allora

$$V_m(\varepsilon)=\{u \in M^+: \exists x_1,\dots,x_m \in S^{n-1}, |x_i|>\frac{1}{\varepsilon}, |x_i-x_j|>\frac{1}{\varepsilon}, |u - \sum_{j=1}^{m} \omega(.-x_j)|<\varepsilon\}$$

$$B_m = \left\{\sum_{i=1}^{m} t_i\delta_{x_i}, (t_1,\dots,t_m)\in \Delta_{m-1}, x_i\in S^{n-1}\right\}$$

$$f(\lambda) = B_m \to M^+ \qquad f(\lambda)(\sum_{i=1}^{m} t_i\,\delta_{x_i}) = \tau\,(\sum_{i=1}^{m} t_i\,\delta_{x_i})\sum_{i=1}^{m} t_i\,\delta_{x_i}$$

Vale un lemma analogo al lemma 12:

Lemma. *Per ogni* $m \in \mathbf{N}$ *esiste* $\lambda_m>0$, *tale che*

$$f(\lambda)(B_m) \subset W_m$$

$$\exists \bar{m}\,,\ \exists \bar{\lambda} \quad f(\bar{\lambda})(B_{\bar{m}}) \subset V_{\bar{m}-1}$$

Pertanto, per ogni $\lambda > \max(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \bar{\lambda})$ a tutti i livelli si possono considerare i diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd}
H_*(B_m, B_{m-1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f(\lambda)_*"'] & H_{*-1}(B_{m-1}) \arrow[d, "f(\lambda)_{*-1}"] \\
H_*(W_m, W_{m-1}) \arrow[r, "\partial"] & H_{*-1}(W_{m-1})
\end{tikzcd}$$

Ma soltanto $f(\lambda)_* : H_*(B_{\bar{m}}, B_{\bar{m}-1}) \to H_*(W_{\bar{m}}, W_{\bar{m}-1})$ è nulla.

Intuitivamente è chiaro che B_m ha dimensione $(n-1)m+m-1$, e si dimostra che in effetti

$$H_{(n-1)m+m-1}(B_m, B_{m-1}) = \mathbf{Z}_2 .$$

Supponiamo che $\bar{m} = 3$ e consideriamo i due diagrammi (in generale occorrerà

considerare m-1 diagrammi di questo tipo)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Z}_2 & & \mathbf{Z}_2 \\
H_{2(n-1)+2}(B_3,B_2) \arrow[r] \arrow[d, "f(\lambda)_{2(n-1)+2}"'] & H_{2(n-1)+1}(B_2,B_1) \arrow[d, "f(\lambda)_{2(n-1)+1}"'] & H_n(B_2,B_1) \arrow[r] \arrow[d, "f(\lambda)_n"'] & H_{n-1}(B_1) \arrow[d, "f(\lambda)_{n-1}"'] \\
H_{2(n-1)+2}(W_1,W_2) \arrow[r] & H_{2(n-1)+1}(W_2,W_1) & H_n(W_2,W_1) \arrow[r] & H_{n-1}(W_1)
\end{tikzcd}$$

Costruiremo poi i due omomorfismo μ e μ_1 che rendano commutativo questo diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Z}_2 & \mu & & \mathbf{Z}_2 \\
H_{2(n-1)+2}(B_3,B_2) \arrow[r] \arrow[d, "f(\lambda)_{2(n-1)+2}"'] & H_{2(n-1)+1}(B_2,B_1) \arrow[r] \arrow[d, "f(\lambda)_{2(n-1)+1}"'] & H_n(B_2,B_1) \arrow[r] \arrow[d, "f(\lambda)_n"'] & H_{n-1}(B_1) \arrow[d, "f(\lambda)_{n-1}"'] \\
H_{2(n-1)+2}(W_1,W_2) \arrow[r] & H_{2(n-1)+1}(W_2,W_1) \arrow[r] & H_n(W_2,W_1) \arrow[r] & H_{n-1}(W_1) \\
 & & \mu_1 & &
\end{tikzcd}$$

e tali che

$$\partial \cdot \mu: H_{2(n-1)+1}(B_2,B_1) \to H_{n-1}(B_1)$$

sia surriettiva. D'altra parte anche

$$\partial: H_{2(n-1)+2}(B_3,B_2) \to H_{2(n-1)+1}(B_2,B_1) \text{ è su,}$$

quindi possiamo procedere come prima per asserire l'esistenza di soluzioni.

La costruzione di μ è la parte più delicata della prova. Riposa ancora su un lemma di deformazione e sulla soluzione di un problema di minimo in dimensione finita analoga a (6), ma è più tecnica e utilizza una maggiore strumentazione topologica.

4. ESTENSIONI

La tecnica che abbiamo presentato si può applicare anche ad un'equazione semilineare della forma

$$\Delta u - u + g(x)f(u) = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R}^n,$$

se f è una funzione di classe C^1, nonnegativa che verifica opportune ipotesi di crescita di tipo potenza, ad esempio

f ' è monotona crescente

$$\frac{f(u)}{u^{q-1}} \text{ è nondecrescente, } \frac{f(u)}{u^{r-1}} \text{ è noncrescente, con } 2<q<r<\frac{2n}{n-2}.$$

Tuttavia in questo caso non si può concludere perché non sono verificati teoremi di unicità delle soluzioni dell'equazione all'infinito, se non sotto ipotesi molto restrittive su f (cf. [McS]). D'altra parte tutte le soluzioni di (5) sono radialmente simmetriche, (cf. [GNN]), e la prova di Kwong dell'unicità della soluzione per l'equazione (3), è appunto una prova di unicità della soluzione radialmente simmetrica. Pertanto non è irragionevole sperare di estendere i risultati di unicità anche al caso dell'equazione (5).

La situazione è profondamente diversa per quanto riguarda le equazioni quasilineari,

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) + |u|^{p-2}u - g(x)|u|^{q-2} = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R}^n.$$

Anche a questa equazione si possono applicare le stesse tecniche di topologia algebrica, ma il problema dell'unicità è ancora aperto.

BIBLIOGRAFIA

[BaL] A. BAHRI and P.L. LIONS, *On the Existence of a Positive Solution of Semilinear Elliptic Equations in Unbounded Domains,* to appear.

[BC] V. BENCI and G. CERAMI, *Positive Solutions of Some Nonlinear Elliptic Problems in Exterior Domains*, Arch. Rational Mech. Anal. 99, 4 (1987), 283-300.

[BL] H. BERESTYCKI and P.L. LIONS, *Nonlinear Scalar Field Equations, Existence of a Ground State,* Arch. Rational Mech. Anal., 82 (1983), 313-346.

[E] I. EKELAND, *Nonconvex minimisation problems*. Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 443-479.

[GNN] B. GIDAS, W.M.NI and L. NIREMBERG, *Symmetry of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in* $\mathbf{R}^n$. Adv. in Math. Suppl. Stud. 7A, Math. Anal. Appl. Part A (1981), 369-402.

[K] M.K. KWONG, *Uniqueness of Positive Solutions of* $\Delta u-u+u^p=0$ in $\mathbf{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. 105 (1989), 243-266.

[MS] K.McLEOD and J. SERRIN, *Uniqueness of Positive Radial Solutions of* $\Delta u+f(u)=0$ in $\mathbf{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. 99, 2, (1987), 115-145.

[R] P.H. RABINOWITZ, *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems*. In Eigenvalues of Nonlinear Problems, Ediz. Cremonese, Roma, 1972.